

Platonische Körper



Tetraeder, Würfel, Ikosaeder und Oktaeder

... Sinnbilder für die Elemente der Natur

Schon in der Antike wurden die platonischen Körper aufgrund der Regelmäßigkeit und Schönheit als göttliche Geschöpfe betrachtet. Wir halten oft mathematische Aussagen und Größen, wie z. B. die natürlichen

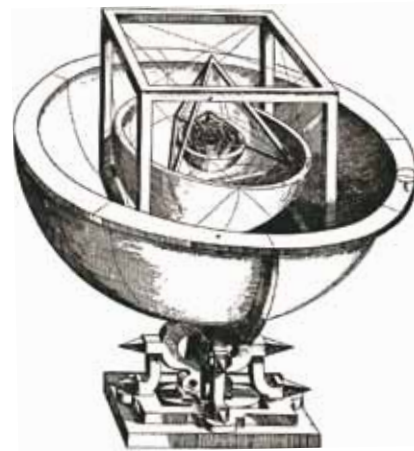
Zahlen, für universelle und schon ewig existierende Bestandteile unseres Universums, aber die Aura der platonischen Körper leuchtet in der Mathematik mit besonderem Glanz.

Die platonischen Körper sind besonders regelmäßige Formen: Jede Seitenfläche ist ein reguläres Polygon, alle Flächen eines solchen Körpers sind gleich, und ebenso haben alle Eckenkonfigurationen volle Symmetrie. Von dieser Art, das wussten schon die Griechen zur Zeit Platons, gibt es genau fünf: das Tetraeder, das Hexaeder (oder Würfel), das Oktaeder, das Ikosaeder und das Dodekaeder. Alle fünf platonischen Körper sind nach der Anzahl ihrer Seitenflächen benannt. Das Dodekaeder wurde erst später gefunden und war daher ein besonderes Heiligtum.

Stehen die ersten vier Polyeder für die Elemente der griechischen Naturphilosophie (Erde, Feuer, Luft, Wasser), so repräsentiert das Dodekaeder das ganze Universum (Quintessenz = fünfte Essenz). Im Buch *Timaios* begründet *Platon* (428–348 v. Chr.) eine Naturphilosophie auf der Geometrie von Dreiecksflächen, ausgehend von den platonischen Körpern. Etwa zweitausend Jahre nach Platon werden die platonischen Körper wieder herangezogen, und erneut für nichts Geringeres als zur Beschreibung des Universums eingesetzt. Nach *Johannes F. Kepler* (1571–1630) bewegen sich die Planeten im Sonnensystem auf Inkugeln

und Umkugeln von ineinander geschachtelten platonischen Körpern. Das Video „Mesh“ visualisiert mit einem Augenzwinkern anschaulich diese Philosophien. Auch heute haben die platonischen Körper nichts von ihrer Faszination eingebüßt. In der Tat leben regelmäßige Körper als Radiolarien, Kristalle, Viren, Fullerene, Fußbälle und andere Formen ganz harmonisch in unserer täglichen Welt.

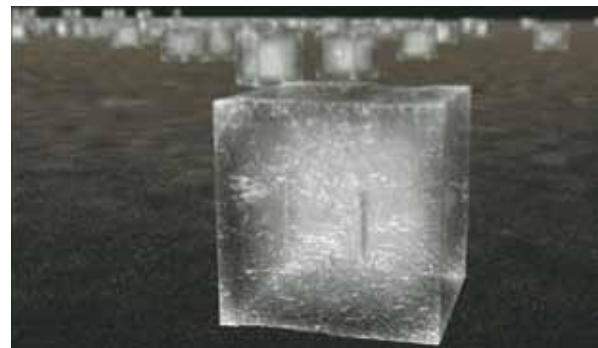
Modell des Sonnensystems nach Kepler



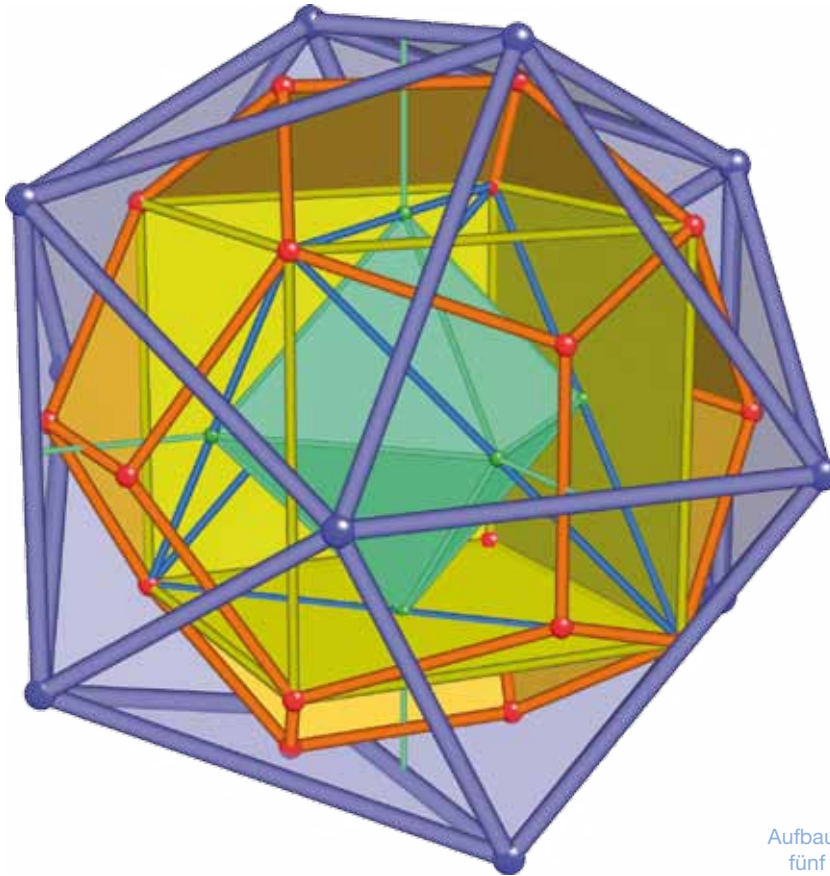
Dodekaeder – Quintessenz, das Universum



Regelmäßige Strukturen in Kristallen, Würfel im Kochsalz



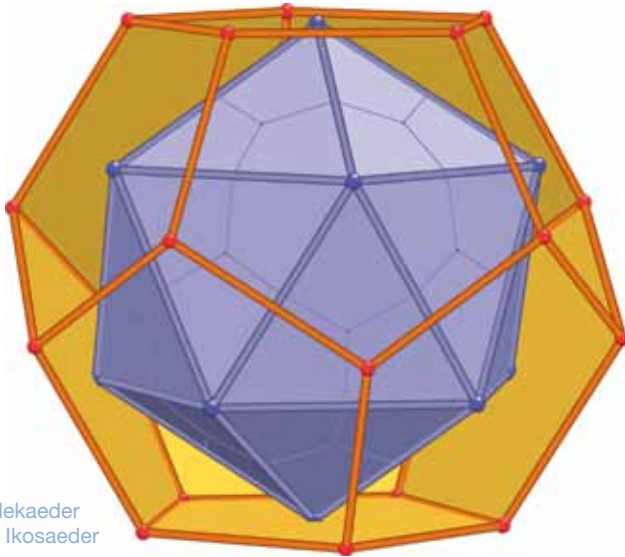
Dualität und Symmetrie



Aufbau und Symmetrie der
 fünf platonischen Körper

Auf den ersten Blick erscheinen die fünf platonischen Körper als Unikate ohne einen einfachen Bezug zueinander. Durch eine geschickte Anordnung können wir jedoch eine gemeinsame Struktur in ihrem Aufbau und in ihren Symmetrie-Eigenschaften erkennen: Im Bild

oben beginnen wir mit einem Würfel und seinem dualen Oktaeder (s. rechte Seite), dessen Ecken wir in die Flächenmitten des Würfels legen. Zur besseren Orientierung verlängern wir die Oktaederecken zum grünen Achsenkreuz. Das Tetraeder kann unter Verwendung



Dodekaeder
 und Ikosaeder

der Hälfte der Würfecken zwischen Würfel und Oktaeder eingeschrieben werden. Auf jeder der sechs Würfelseiten kommt genau eine Tetraederkante zu liegen. Nun setzen wir auf jede Würfelseite ein kleines orangefarbenes Dach: Dabei wählen wir die Giebelhöhe gerade so hoch, dass zwei benachbarte Dächer längs ihrer gemeinsamen Würfelkante ein ebenes Fünfeck bilden. Zu den zwölf Würfelkanten erhalten wir damit die zwölf Fünfecke eines Dodekaeders. Auch die Anzahl der Ecken ($8 + 2 \cdot 6$) und Kanten ($5 \cdot 6$) des Dodekaeders lassen sich bei dieser Konstruktion leicht aus den Würfelangaben (8) und (6) errechnen. Zum Schluss wird das Ikosaeder als dualer Körper dem Dodekaeder umschrieben.

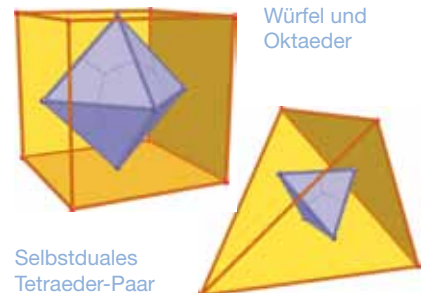
Das grüne Achsenkreuz markiert übrigens sechs der 30 Ikosaederkanten als eine ausgezeichnete Menge von Kanten. Durch fünfzählige Rotation der Menge um eine beliebige Ikosaederecke erhalten wir insgesamt fünf disjunkte Kantenmengen. Symmetrien dieser Art sind in der Ikosaedergruppe sichtbar, die die Obergruppe aller Symmetriegruppen der platonischen Körper darstellt.

Dualität

Die platonischen Körper bilden in natürlicher Weise Paare von zueinander dualen Körpern: Dodekaeder-Ikosaeder, Würfel-Oktaeder und Tetraeder-Tetraeder. Bei dualen Körpern liegen die Eckpunkte des einen (blauen) Körpers jeweils in der Flächenmitte des dualen (orangefarbenen) Körpers, und umgekehrt. Die Anzahl der Ecken und Flächen von zwei dualen Körpern stimmt daher in der Tabelle kreuzweise überein. Die Anzahl der Kanten sind sogar gleich:

	Ecken	Kanten	Flächen
Tetraeder	4	6	4
Würfel	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20

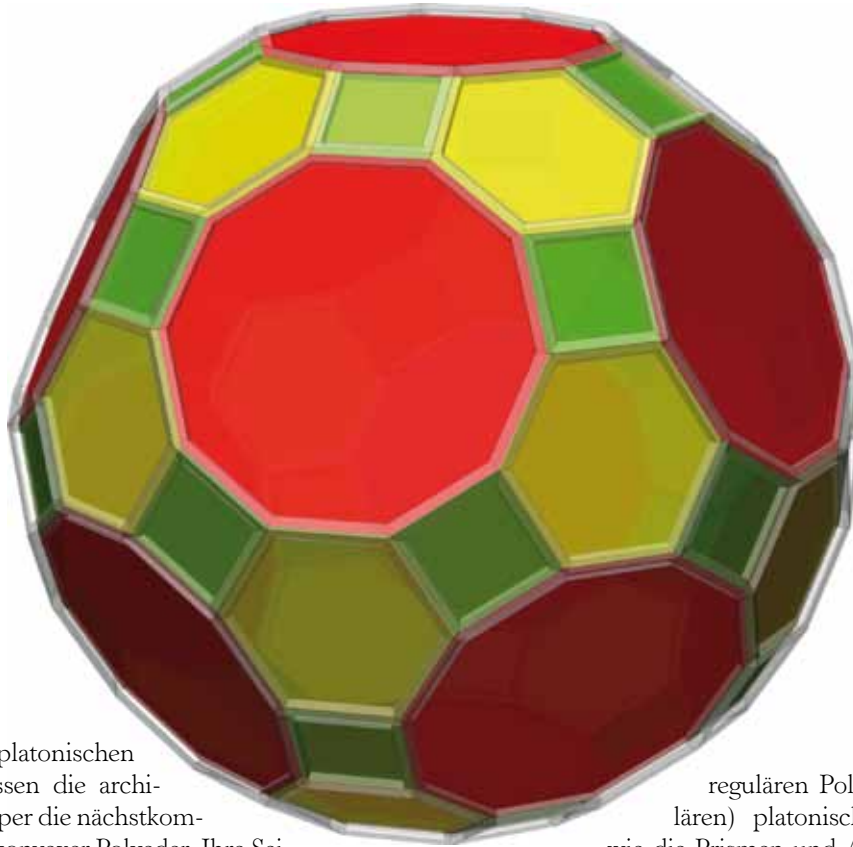
Übrigens ist die alternierende Summe von Ecken - Kanten + Flächen, genannt Euler-Charakteristik, für alle sphärischen Polyeder immer gleich 2.



Selbstduales
 Tetraeder-Paar



Archimedische Körper



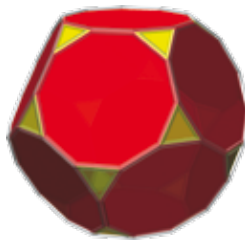
Großes Rhomben-
 ikosidodekaeder

Nach den platonischen Körpern umfassen die archimedischen Körper die nächstkomplexere Klasse konvexer Polyeder. Ihre Seitenflächen bestehen aus regulären flachen Polygonen. Jeder Eckpunkt lässt sich mit Hilfe einer Drehung oder Spiegelung in jeden anderen Eckpunkt überführen, sodass sich der transformierte Körper nicht vom ursprünglichen Körper unterscheidet. Per Definitionem schließt man aus dieser Klasse der sogenannten halb-

regulären Polyeder die (regulären) platonischen Körper sowie die Prismen und Antiprismen aus. Ebenso werden die beiden spiegelbildlichen Varianten des abgeschrägten Würfels und des abgeschrägten Dodekaeders nicht zusätzlich mitgezählt. Insgesamt ergeben sich damit 13 archimedische Körper – ein Resultat, das schon dem Namenspatron *Archimedes* (287–212 v. Chr.) bekannt war.



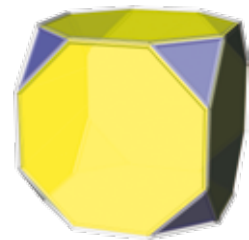
Icosaederstumpf (Fußball)



Dodekaederstumpf



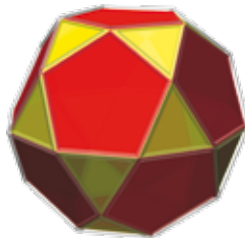
Oktaederstumpf



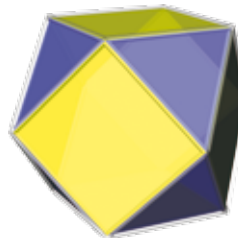
Würfelstumpf



Rhombenikosidodekaeder



Ikosidodekaeder



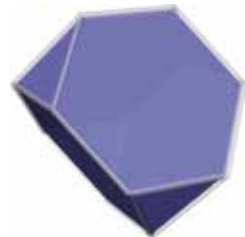
Kuboktaeder



Rhombenkuboktaeder



Abgeschrägtes Dodekaeder



Tetraederstumpf



Großes Rhombenkuboktaeder

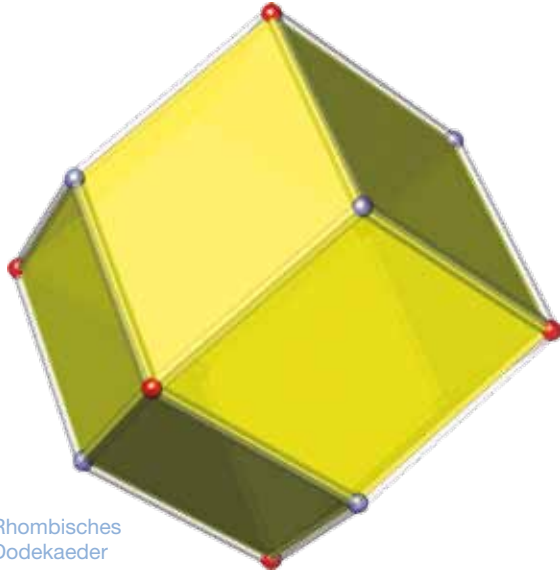


Abgeschrägter Würfel

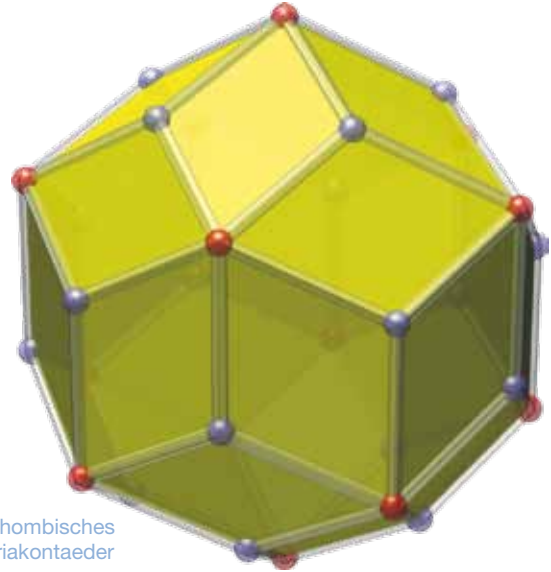
Die archimedischen Körper lassen sich (mehr oder weniger leicht) aus den platonischen Körpern durch Abschneiden von Ecken und Kanten erzeugen. Auf diesen Vorgang nehmen auch die Namen, wie Würfelstumpf, Bezug. In der Galerie sind die Polyeder vergleichbar positioniert und zusammengehörende Flächen gleich eingefärbt: Das Hauptbild und die linke Fünfergruppe (ohne Tetraederstumpf) enthält sechs Polyeder, deren rote Seiten Teilmengen eines zugrunde liegenden Do-

dekaeders und deren gelbe Seiten Teilmengen eines Icosaeders sind. Die beiden rechten Spalten zeigen eine zweite Gruppe von sechs Polyedern, deren gelbe Flächen Teilmengen eines Würfels und deren blaue Flächen Teilmengen eines Oktaeders sind. Der Tetraederstumpf erscheint in dieser Galerie als Sonderling, da das Tetraeder zu sich selbst dual ist und fortgesetztes Abschneiden der kleineren Seiten des Tetraederstumpfes wieder ein Tetraeder liefern würde.

Johnson- und Catalan-Körper



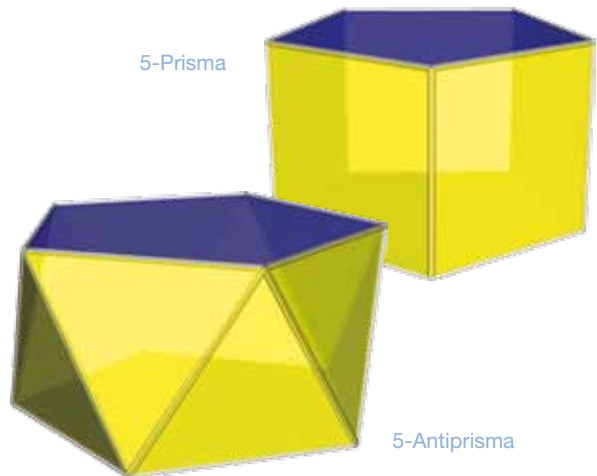
Rhombisches
Dodekaeder



Rhombisches
Triakontaeder

Jenseits der regulären und halbrekulären Polyeder gibt es viele weitere regelmäßige Polyeder. Zum Beispiel bestehen das rhombische Dodekaeder und das rhombische Triakontaeder zwar aus regelmäßigen Rauten, aber erstens sind Rauten keine regelmäßigen Polygone, und zweitens haben beide Körper unterschiedliche Typen von Ecken (rot und blau mit unterschiedlicher Valenz, also Anzahl der angrenzenden Kanten). Die Sternpolyeder (rechts oben) verletzen das Konvexitätsgebot und sind deshalb ebenfalls nicht regulär.

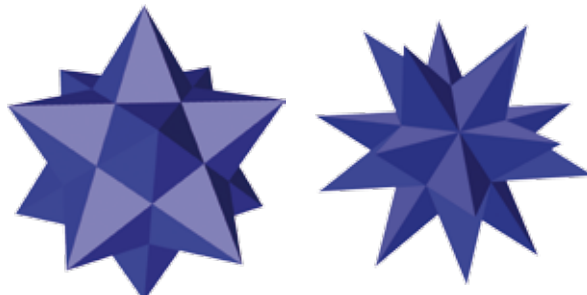
Prismen und Antiprismen gibt es zu jedem regulären Polygon als Basisfläche. Aufgrund dieser einfachen Konstruktion werden sie bei den archimedischen Körpern ausgeschlossen.



5-Prisma

5-Antiprisma

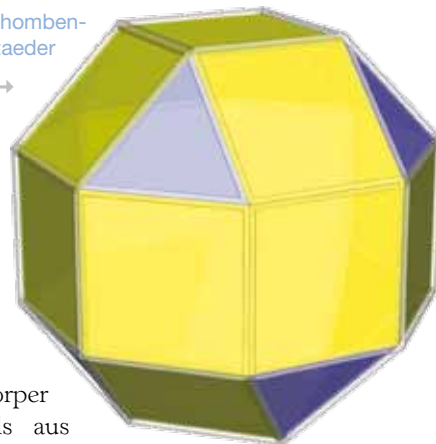
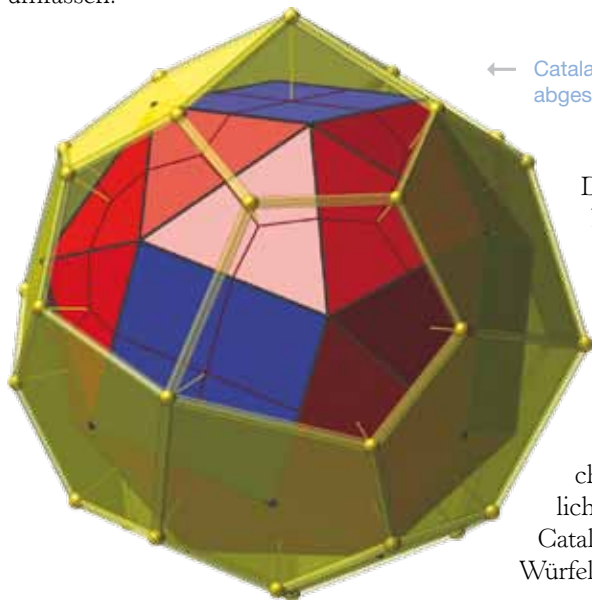
Die beiden Sterndodekaeder waren schon *Johannes Kepler* bekannt, der sie 1619 beschrieb. Beide Polyeder entstehen jeweils durch „Nachaußenziehen“ der Mittelpunkte eines Dodekaeders (links) bzw. eines Ikosaeders (rechts), bis Planarität mit den anderen Seiten entsteht.



Kleines Sterndodekaeder

Großes Sterndodekaeder

Eine bemerkenswerte Beobachtung wurde 1930 von *Jeffrey C. P. Miller* (1906–1981) gemacht, der beinahe einen weiteren archimedischen Körper entdeckte, das Pseudo-Rhombenkuboktaeder – sofern man nicht die von uns verwendete globale Eckengleichheit verwendet, sondern nur die Eckenfiguren vergleicht. Es entsteht aus dem Rhombenkuboktaeder durch Verdrehen des unteren Drittels um 45° . Es gehört zur Klasse der Johnson-Körper, die alle konvexen, aus regulären Seiten aufgebauten Polyeder jenseits der besprochenen umfassen.

Pseudo-Rhomben-
kuboktaeder← Catalan-Körper zum
abgeschrägten Würfel

Die Catalan-Körper bestehen jeweils aus lauter identischen, nicht-regulären Seitenflächen und sind dual zu den archimedischen Körpern, wobei Eckpunkte und Flächen mit Flächen und Eckpunkten des anderen Polyedertyps korrespondieren.

Da die zugehörigen archimedischen Körper unterschiedliche Seiten besitzen, haben die Catalan-Körper unterschiedliche Eckentypen. Im linken Bild wird die Konstruktion eines Catalan-Körpers aus den Flächenmitten eines abgeschrägten Würfels gezeigt.

Die Geometrie des Fußballs

Die Symmetrie der Kugel

Der klassische Lederfußball wird aus 20 weißen Sechsecken und zwölf schwarzen Fünfecken genäht. Diese magischen Zahlen erinnern an die Anzahl der Ecken und Flächen eines Dodekaeders, dessen rote Kanten rechts im Bild auf den Europass-Fußball gezeichnet wurden.

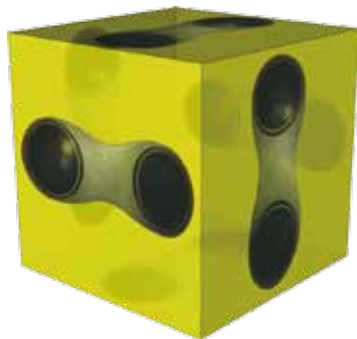
Es ranken sich viele Theorien, warum der Fußball gerade als abgestumpftes Ikosaeder realisiert wurde. Man hätte auch einen Würfel oder ein anderes archimedisches oder reguläres Polyeder verwenden können. Im Vergleich zu anderen Körpern mit vergleichbarem

Klassische Symmetrie
 des Fußballs



Der Europass
 zur EM 2008 mit Symmetrien

Verhältnis der Radien von Umkugel zu Inkugel minimiert der klassische Fußball allerdings die Anzahl der Kanten pro Ecke (3) sowie die Anzahl der Lederflecken (32) und der Nähte (90). In gewisser Hinsicht ist der klassische Fußball damit optimal. Die Bälle der Weltmeisterschaft 2006 (Teamgeist) und Europameisterschaft 2008 (Europass) zeigen trotz ihrer Unterschiede erhebliche Ähnlichkeiten zum klassischen Fußball: Zur Verdeutlichung wurden in Rot die Kanten eines Dodekaeders aufgemalt. In Blau sehen wir einen Würfel, dessen Seiten jeweils einem Flansch sowie jeweils zwei Dodekaederseiten zugeordnet sind.



← Würfel mit
Symmetrie des Pyritkristalls

Konstruktion des Europass-Fußballs vom Würfel über das Pyrit-Dodekaeder zur runden Kugel



Der Teamgeist von 2006 und der Europass 2008 haben die Symmetrie eines Pyritkristalls. Wie ein Dodekaeder besteht das Kristall aus zwölf Fünfecken, allerdings haben die Fünfecke unterschiedliche Seitenlängen und sind paarweise an ihrer kürzesten Kante verbunden. Damit hat der aktuelle Fußball eine reduzierte Symmetrie gegenüber dem klassischen Fußball aus Fünf- und Sechsecken.

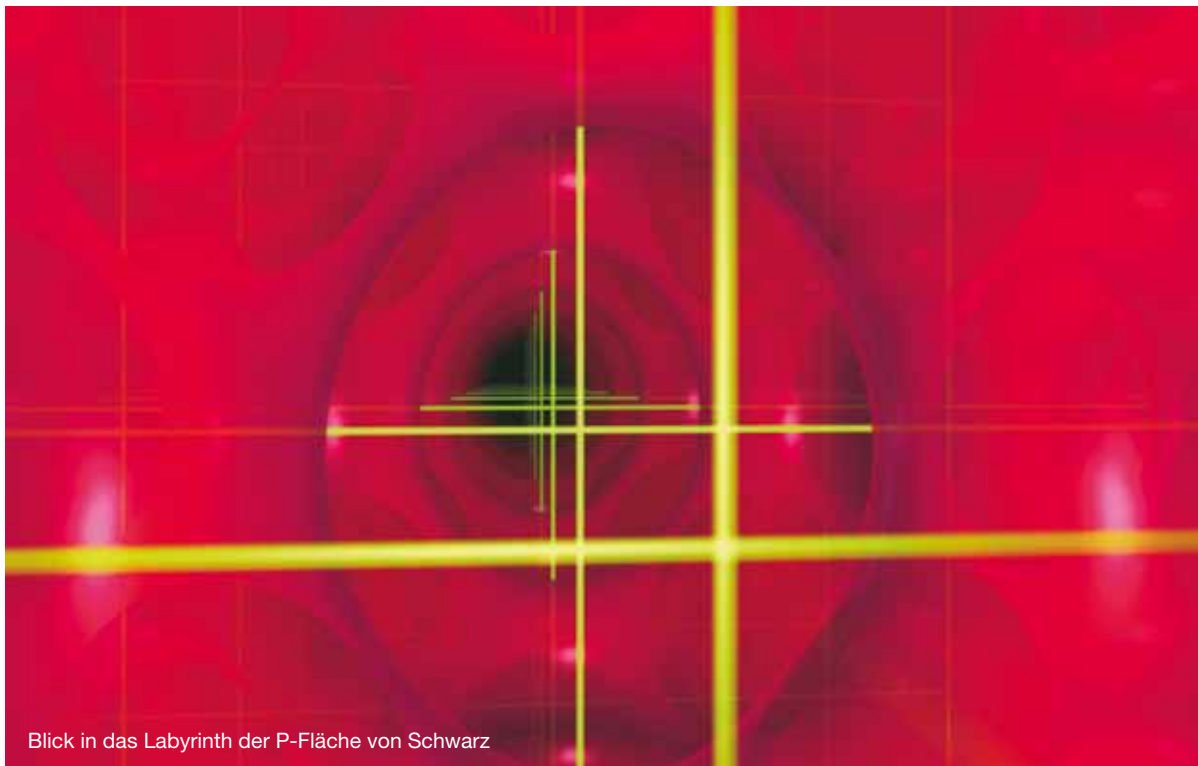
Die Bildsequenz auf dieser Seite zeigt die Konstruktion des Europass, ausgehend von einem Würfel. Zunächst bekommen die Würfelseiten durch einen Flansch eine Orientierung, jeweils um 90° gedreht gegenüber ihren Nachbarflächen. Im zweiten Bild erhält der Würfel ein

Dodekaeder mit Pyritsymmetrie übergestülpt, wobei jeder Würfelseite ein Paar von Fünfecken zugeordnet wird. Weiteres Abrunden liefert in den folgenden Bildern den fertigen Fußball.

Interessant ist der Produktionsprozess der Herstellerfirma Adidas. Dort wird zunächst eine innere Gummihaut als reines Dodekaeder erzeugt, auf dem dann die sechs Flansche und acht Ecksterne aufgeklebt werden.

Die mathematische Analyse der Symmetrieeigenschaften der aktuellen Fußbälle sagt natürlich nichts über deren physikalischen Vorteile aus.

Periodische Minimalflächen

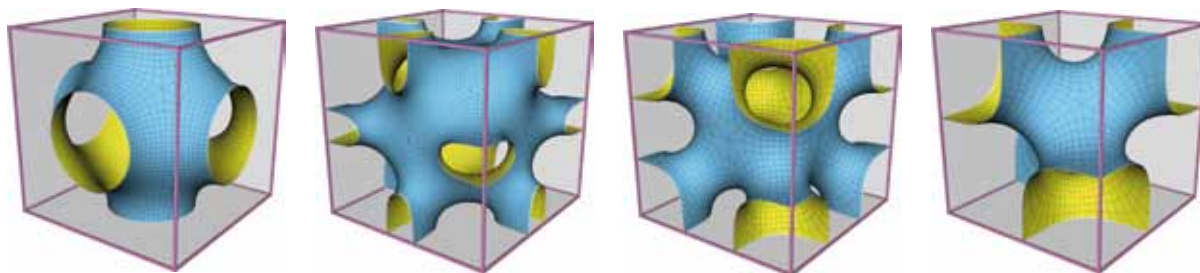


Blick in das Labyrinth der P-Fläche von Schwarz

Periodische Minimalflächen formen die größte bekannte Klasse von eingebetteten Minimalflächen ohne Selbstschnitte. Anschaulich können wir eine periodische Fläche mit Hilfe eines konvexen Polyeders herstellen, indem wir eine Seifenhaut, ähnlich dem Gergonne-Problem, finden, die überall senkrecht auf die Seiten des Polyeders trifft. Dies ist nicht einfach, aber im Erfolgsfall ist die Randkurve eine Symmetrielinie,

und die Fläche kann durch Spiegelung an der Polyederseite in das Nachbarpolyeder fortgesetzt werden. Beginnend mit *Hermann Amandus Schwarz*, seinem Schüler *Edvard Neovius* und später von *Howard Jenkins*, *James Serrin*, *Alan Schoen*, *Werner Fischer*, *Elke Koch* und *Hermann Karcher* wurden eine Vielzahl von dreifach periodischen Minimalflächen gefunden, die sich unendlich über den ganzen Raum erstrecken.

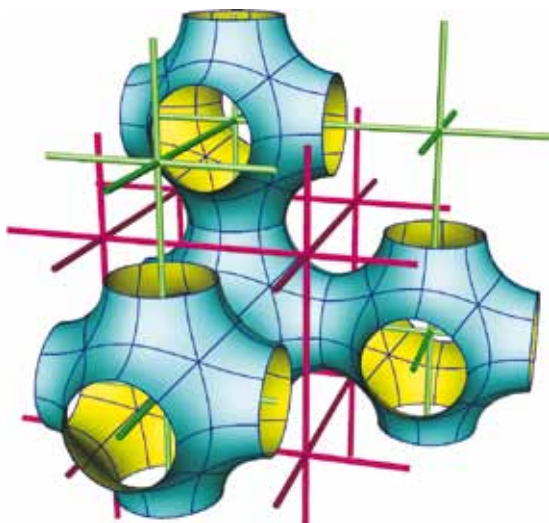
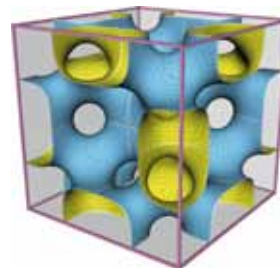
Bild links von Andreas Arnez, Konrad Polthier, Martin Steffens, Christian Teitzel
 H. Karcher, K. Polthier *Construction of triply periodic minimal surfaces* Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 1996, 354
 K. Brakke www.susqu.edu/brakke/evolver/examples/periodic/periodic.html Triply periodic minimal surfaces



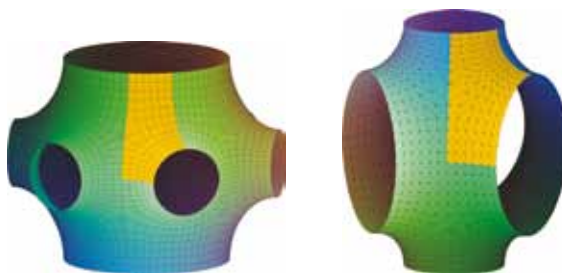
Fundamentalzellen von einfachen periodischen Flächen.
 Von links: Schwarz-P, Neovius, I-Wp, F-Rd, 8 Zellen der F-Rd.

Eingebettete periodische Minimalflächen trennen den Raum in zwei disjunkte Gebiete, nennen wir sie Inneres und Äußeres. Beide Gebiete bilden zwei miteinander verwobene, unendlich ausgedehnte Labyrinth im Raum, die von der Minimalfläche als Zwischenwand getrennt werden. Diese Sichtweise inspirierte den NASA-Forscher *Alan Schoen* zur experimentellen

Konstruktion einer Vielzahl von periodischen Minimalflächen. Er betrachtete Kristallstrukturen, bei denen die positiv und negativ geladenen Atome zwei getrennte, aber sich durchdringende Gitter bilden, sozusagen ein positiv und ein negativ geladenes Gitter. Die Äquipotentialfläche zur Ladung 0 ist dann eine die beiden Gitter trennende Fläche. Wenngleich dieser Ansatz auf sehr anschaulichen Argumenten basiert und die Äquipotentialfläche keine exakte Minimalfläche darstellt, so war die Idee dennoch eine effektive Heuristik und führte zur Konstruktion vieler Beispiele.



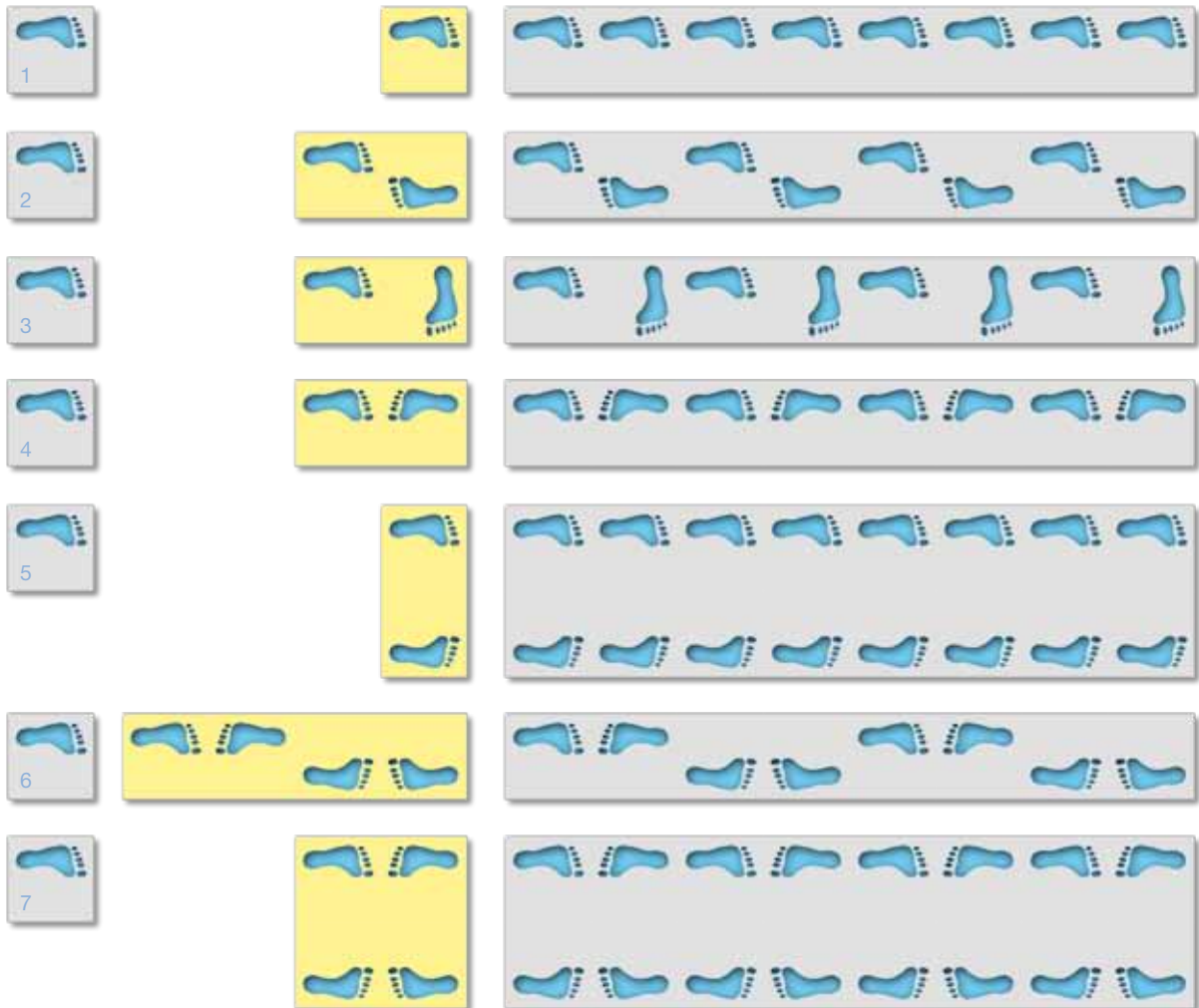
Inneres und äußeres Labyrinth getrennt durch die P-Fläche



H'-T-Fläche von Alan Schoen

Bandornamente

Es gibt genau sieben Grundtypen.

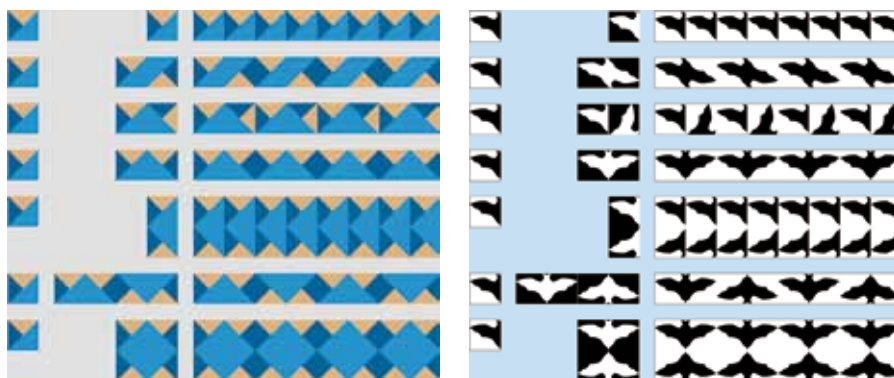
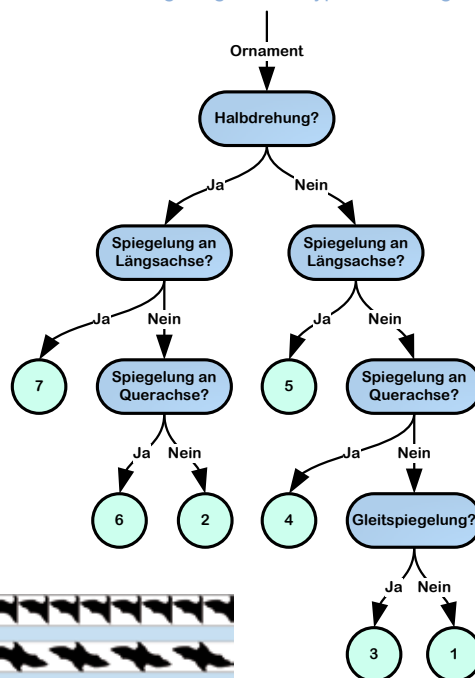


Zwei gleichsinnig kongruente Figuren können immer durch eine Drehung oder Schiebung, zwei gegensinnig kongruente Figuren immer durch eine Spiegelung oder Gleitspiegelung (Spiegelung und anschließende Verschiebung längs der Spiegelachse) ineinander übergeführt werden.

Bandornamente sind einfach-periodische Muster, deren Grundmuster aus elementaren Kopien einer Primärzelle entstehen. Um sie herstellen zu können, betrachten wir eine (einer quadratischen „Primärzelle“ eingeschriebene) Grundfigur und unterwerfen sie einer dieser Transformationen. Aus der Primärzelle lässt sich durch Schiebungen längs der Hauptrichtungen bzw. Diagonalrichtungen, Drehungen um den Mittelpunkt durch Vielfache von 90° und Spiegelungen an den beiden Mittelachsen bzw. den beiden Diagonalen ein Ornament erzeugen. Sehen wir von der reinen Verschiebung der Primärzelle ab, die ein einfaches und lediglich triviales Bandmuster erzeugt, welches nicht sonderlich interessant ist. Nun können wir zwei bzw. vier gleichsinnig oder gegensinnig kongruente Primärzellen aneinander- bzw. auch übereinander reihen, sodass bei Wiederholung des erweiterten Musters ein

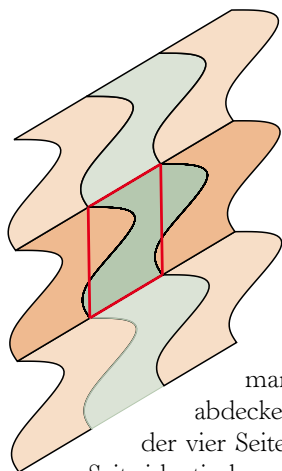
Bandornament herauskommt. Wie wir es auch drehen und wenden: Es gibt nur sechs verschiedene erweiterte Primärzellen, sodass wir in der Summe maximal sieben unterschiedliche Bandmuster aus einer Primärzelle erzeugen können.

Entscheidungsweg bei der Typeneinteilung



Bandornamente durch Drehung und Spiegelung

Ornamentik Parkettierung der Ebene



Wie erzeugt man beliebig viele unterschiedlich aussehende Parkettierungen der Ebene?

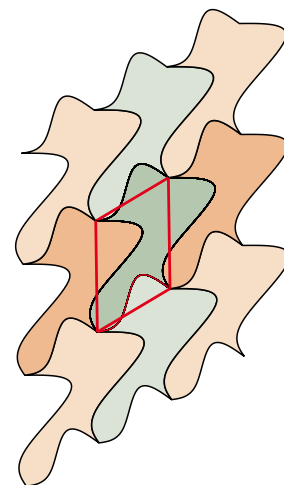
Betrachten wir ein Parallelogramm: Damit kann man schon einmal die Ebene abdecken. Verändern wir nun eine der vier Seiten beliebig und die parallele Seite identisch, passen die Muster noch immer zusammen.

Jeder Baustein entsteht aus dem anderen durch Verschiebung. Nun lassen sich auch die anderen beiden parallelen Seiten des ursprünglichen Parallelogramms zu beliebigen, aber kongruenten Linienzügen verar-

beiten, ohne dass sich am Prinzip etwas ändert.

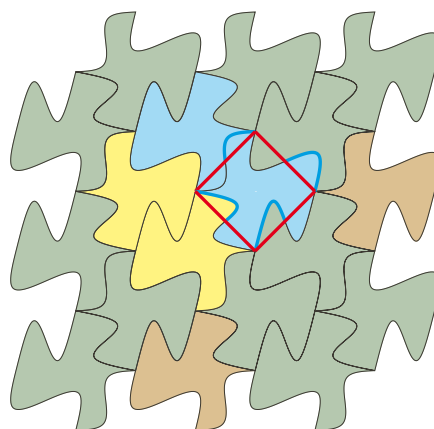
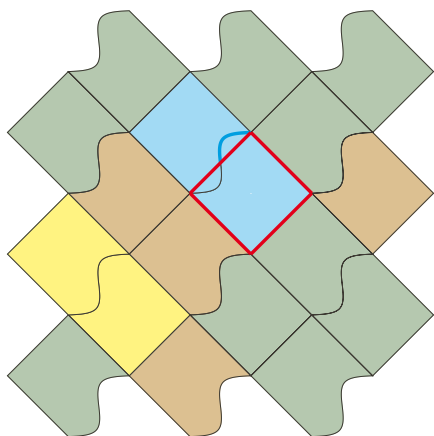
Nehmen wir diesmal ein Quadrat (auch ein Parallelogramm) zu Hilfe. Ändern wir nur eine der vier Seiten so, dass der Linienzug punktsymmetrisch zum Mittelpunkt der Strecke ist. Der so erhaltene Baustein lässt sich durch Spiegelung an diesem Mittelpunkt in einen gleichsinnig kongruenten Baustein transformieren.

Wir können sogar alle vier Seiten des Parallelogramms (Quadrats) andersartig so



ersetzen, dass die neuen Linienzüge zum jeweiligen Seitenmittelpunkt spiegelsymmetrisch sind, ohne dass sich an der Überlegung etwas ändert. Damit erhalten wir ein Muster wie im Bild links.

Gleichsinnig kongruente Bausteine (blau)

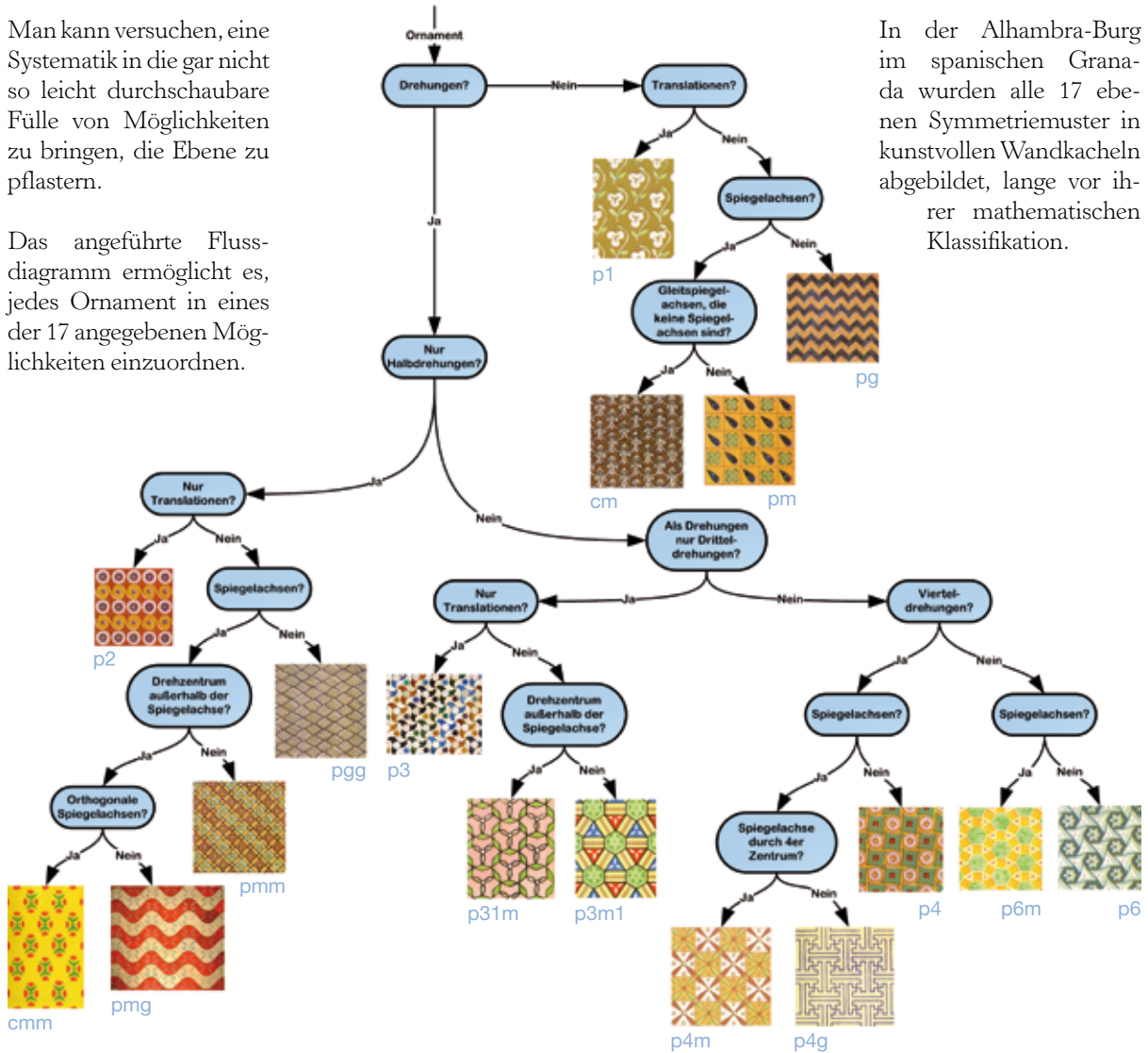


17 ebene Symmetriegruppen

Man kann versuchen, eine Systematik in die gar nicht so leicht durchschaubare Fülle von Möglichkeiten zu bringen, die Ebene zu pflastern.

Das angeführte Flussdiagramm ermöglicht es, jedes Ornament in eines der 17 angegebenen Möglichkeiten einzuordnen.

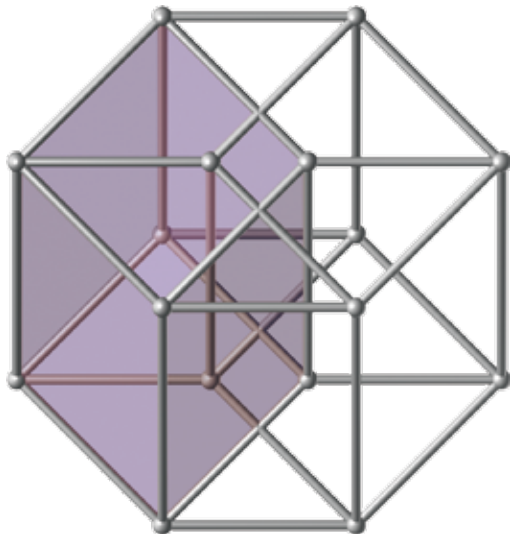
In der Alhambra-Burg im spanischen Granada wurden alle 17 ebenen Symmetriemuster in kunstvollen Wandkacheln abgebildet, lange vor ihrer mathematischen Klassifikation.



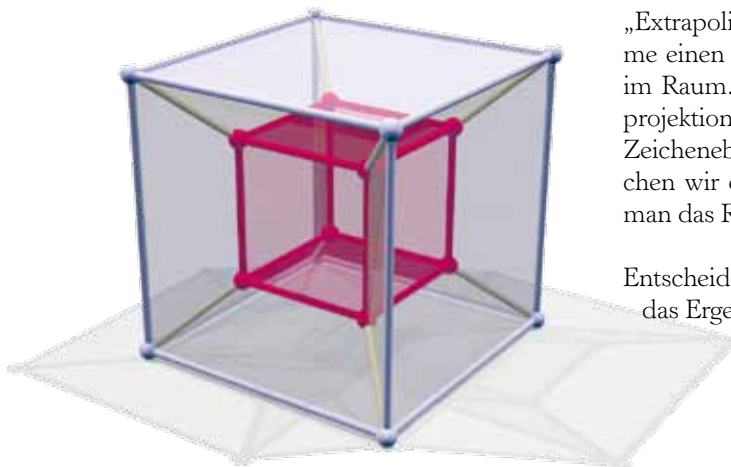
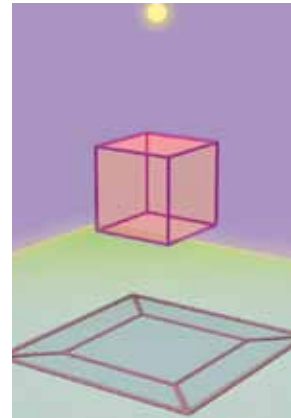
Notation nach Hermann Mauguin
 C. Rohrbach www.claus-rohrbach.de/Symm-home.pdf Symmetrie und Ornamentik – Technische Universität Darmstadt
 Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group#The_seventeen_groups Wallpaper Group
 A. Costa *Arabesques and Geometry* VHS, Springer Verlag 1999

Der vierdimensionale Würfel

Das Sprungbrett zum Verständnis höherer Dimensionen



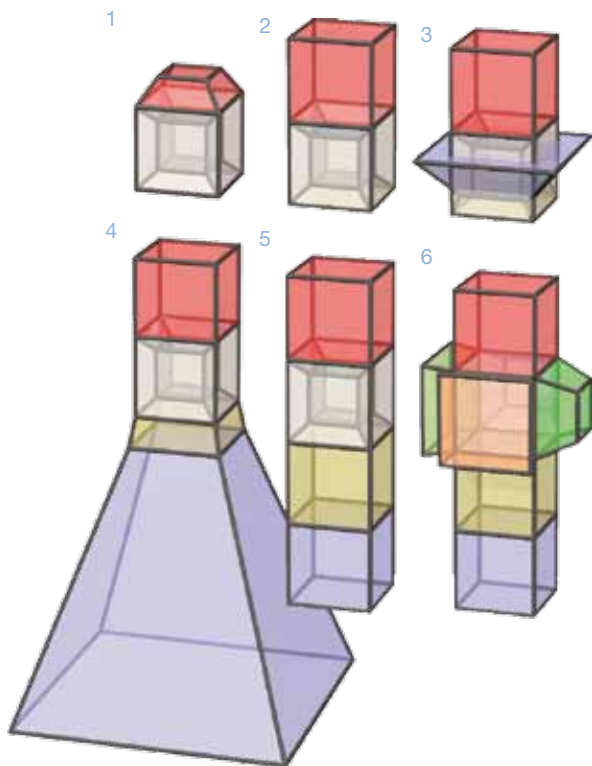
Man nehme ein Quadrat, verschiebe es um eine gewisse Strecke in der Ebene, wobei Anfangs- und Endlage sowie die Schubstrecken der Punkte eingezeichnet werden. Unsere Vorstellungskraft erlaubt es, diese Ansammlung von Strecken als Parallelprojektion eines Würfels aus dem gewöhnlichen dreidimensionalen Raum auf die zweidimensionale Zeichenebene zu interpretieren, wobei wir acht Eckpunkte, zwölf Kanten und sechs Seitenflächen abzählen.



„Extrapolieren“ wir diesen Gedankengang: Man nehme einen Würfel und verschiebe ihn um eine Strecke im Raum. Damit erhalten wir die räumliche Parallelprojektion eines „Hyperwürfels“. Nachdem unsere Zeichenebene nach wie vor zweidimensional ist, brauchen wir eine weitere Projektion. Im Spezialfall kann man das Resultat wie links oben darstellen.

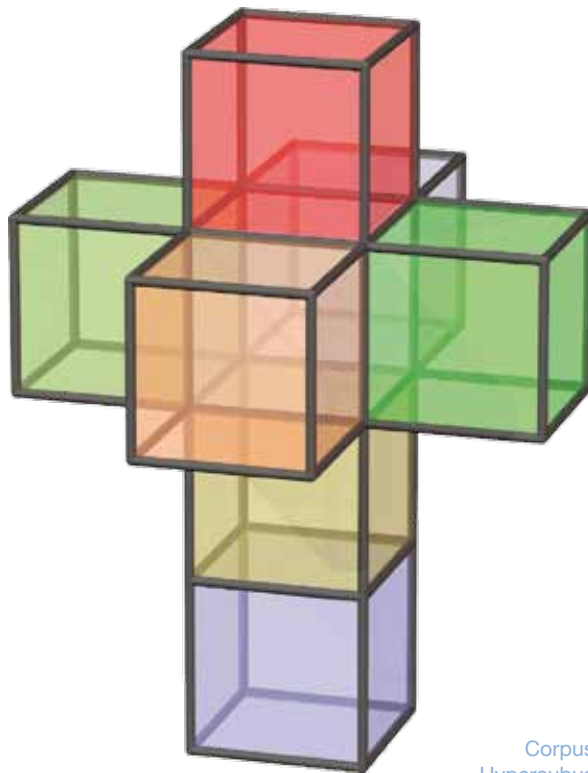
Entscheidet man sich für Zentralprojektionen, kann das Ergebnis für gewöhnliche Würfel wie rechts aussehen, im Fall des Hyperkubus wie links unten. In jeder Ecke stoßen vier Würfel, sechs Quadrate und vier Kanten zusammen ...

... und seine Abwicklung



Salvador Dalí (1904–1989) hat 1954 seinen berühmten Corpus Hypercubus gemalt. Dabei hat er den abgewickelten Hyperwürfel gemalt, bei dem acht Würfel zusammen ein Kreuz bilden.

Beim Abwickeln des gewöhnlichen Würfels klappen wir die Seitenflächen nacheinander um die Kanten des Würfels und erhalten sechs Quadrate in der Ebene.



Corpus
Hypercubus

Der Hyperwürfel besitzt acht gewöhnliche Würfel als Begrenzung. Diese müssen um „Randebenen“ so gedreht werden, dass sie in den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum gelangen. So etwas rechnet man am besten. Die Abbildungsserie zeigt, wie die Drehungen der „Seitenwürfel“ für uns aussehen könnten.

H. Walser www.math.unibas.ch/~walser/Vortraege/Vortrag39/Skript/Hyperwuerfel.pdf

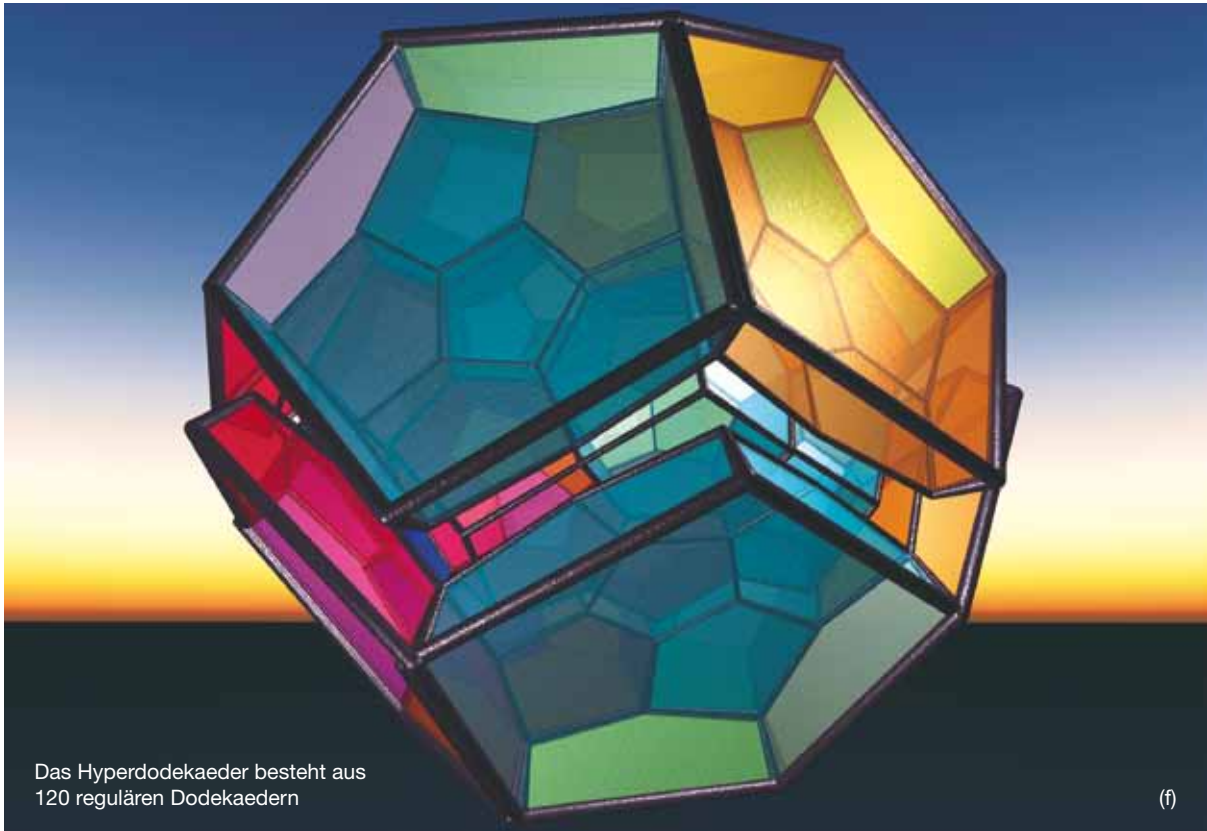
Der n-dimensionale Hyperwürfel – Universität Basel

A., W. Piechatzek www.mathematik-piechatzek.de/Entwurf/Hyperwuerfel/Analogie/analogie.html

Analogie – Mathematik Piechatzek

Wikipedia [http://en.wikipedia.org/wiki/Net_\(polyhedron\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Net_(polyhedron)) Net

Das Hyperdodekaeder aus 120 Zellen



Eine Pflasterung des uns umgebenden dreidimensionalen Raumes aus regulären Körpern ist recht langweilig, da sie nur aus Stapeln von Würfeln bestehen kann. Umso interessanter ist der hyperbolische Raum und die 3-Sphäre, die sich beide mit geeignet skalierten, re-

gulären Dodekaedern pflastern lassen. In der 3-Sphäre gibt es Dodekaeder mit 120° -Kantenwinkel. Hiervon werden genau 120 Exemplare benötigt, um die ganze 3-Sphäre lückenlos zu füllen. Auf der rechten Seite wird die Idee der Konstruktion anschaulich illustriert.

Bilder von Gian Marco Todesco

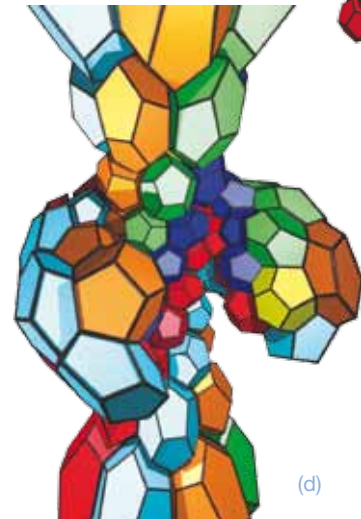
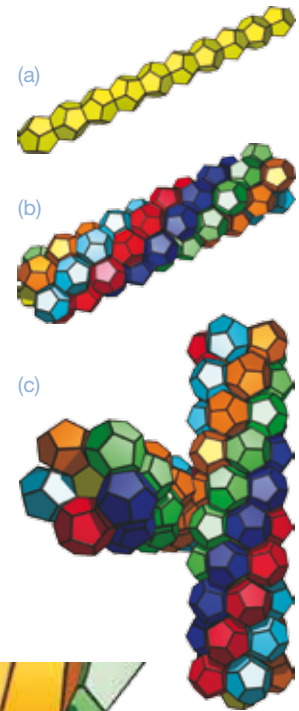
G. M. Todesco *Konstruktion eines Hyperdodekaeders* in: MathFilm Festival 2008, Springer Verlag, DVD, 2008
 MathFilm Festival 2008 www.mathfilm2008.de/2008.003.04 Konstruktion eines Hyperdodekaeders

Die 3-Sphäre ist die Einheitskugel im vierdimensionalen Raum und damit selber ein dreidimensionaler Raum. In der 3-Sphäre gibt es reguläre Dodekaeder mit einem Kantenwinkel von 120° . Damit können genau drei Dodekaeder um eine Kante angeordnet werden. Mit etwas Nachdenken erkennt man, dass vier Dodekaeder passend den Raum um eine Ecke ausfüllen. Aus diesen lokalen Eigenschaften folgt, dass damit die ganze 3-Sphäre ausgefüllt werden kann.

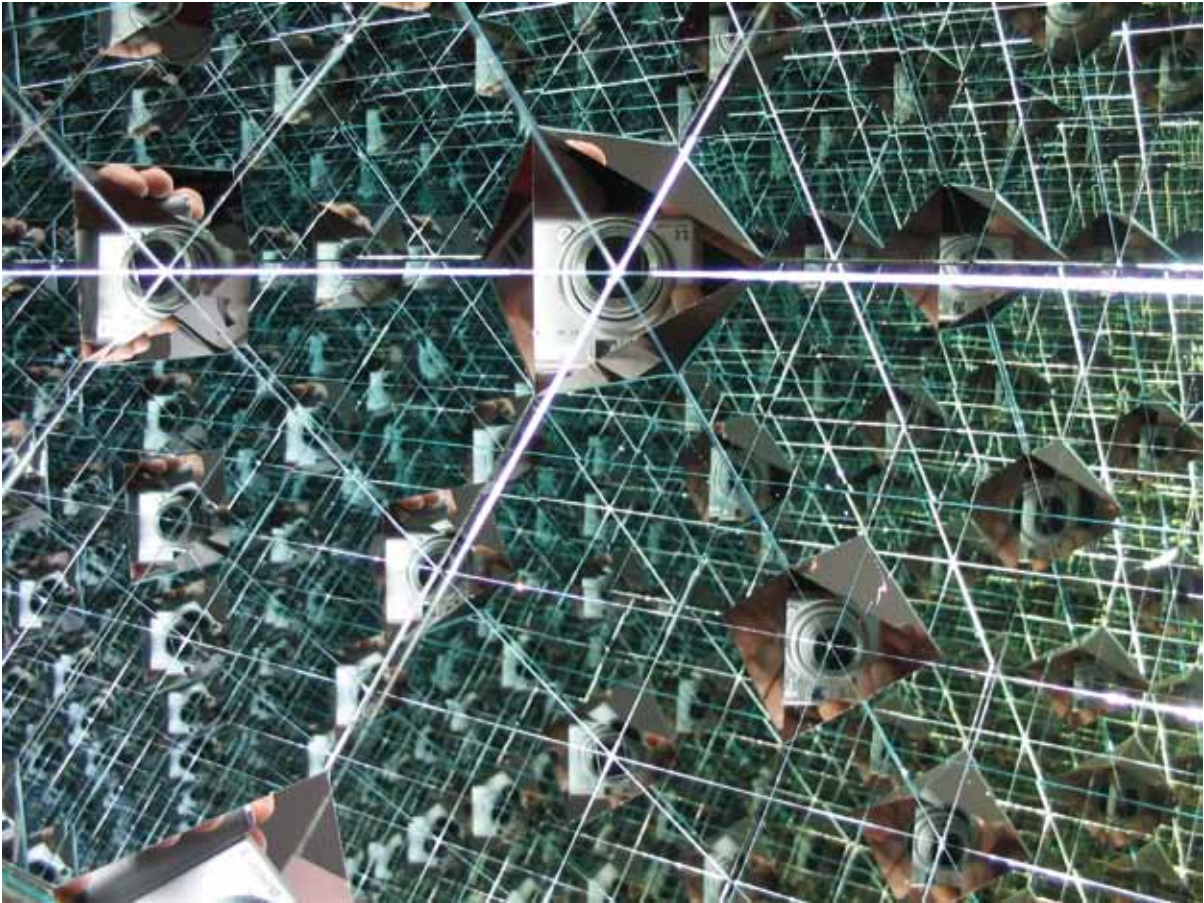
Für eine lückenlose Pflasterung der 3-Sphäre beginnen wir mit dem gelben

Stapel von zehn Dodekaedern (a) und ordnen anschließend fünf weitere Stapel spiralförmig darum an (b). Zusammen mit einem zweiten solchen Makro-Stapel (c) kommen wir auf $2 \cdot 6 \cdot 10 = 120$ Dodekaeder. In der 3-Sphäre schließen wir nun beide Stapel (d+e) zu Kreisen und erhalten eine raumfüllende Pflasterung (f) der 3-Sphäre. Zur besseren Visualisierungen haben wir 3-Sphäre aus dem vierdimensionalen Raum stereographisch in den uns umgebenden dreidimensionalen Raum projiziert. Allerdings erscheinen nun die Dodekaeder nicht mehr alle in gleicher Größe.

Der Aufbau des Hyperdodekaeders ist in der Bildsequenz (a) – (f) gezeigt. Beginnend mit einem Stapel aus zehn Dodekaedern werden fünf weitere Stapel angehängt. Zwei solcher Makro-Stapel ergeben schließlich eine vollständige Pflasterung der 3-Sphäre.



Spiegelungen



Unendliche Tiefe beim Blick in einen verspiegelten Würfel.

Spiegelkabinette können auf einfache Weise unendliche mathematische Räume erzeugen oder aus elementaren Bausteinen komplexe Reflexionen entstehen

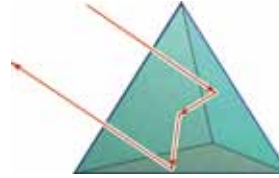
lassen. Im obigen Bild schauen wir mit der Kamera durch eine abgeschnittene Ecke in das Innere eines Würfels, dessen Innenseiten alle verspiegelt sind (s. a.

Skizze rechts oben). Der Sehstrahl wird dabei unendlich oft zwischen den Seitenwänden hin und her gespiegelt und liefert dadurch den Eindruck der unendlichen Tiefe.

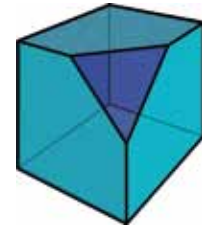


Beim Aufbau solcher Spiegelkabinette muss ausgesprochen sorgfältig gearbeitet werden. Der Winkel zwischen zwei Spiegeln muss lückenlos konstruiert werden und exakt ein ganzzahliger Anteil des Gesamtwinkels sein. Die oberen Bilder zeigen den Strahlenverlauf in einer Spiegelecke. Unten sehen wir zwei Konfigurationen, die zu periodischen Pflasterungen der Ebene

Verspiegelte Ecke: Aus einem einzelnen Dreieck entsteht ein Oktaeder.



Strahlengang in einer verspiegelten Ecke.



Abgeschnittener Würfel, der für das große Bild links verwendet wurde.

ne mit einem rechtwinkligen und einem gleichseitigen Dreieck führen. Kleinste Veränderungen in der Spiegelanordnung würden den räumlichen Eindruck zunichte machen.

Frage

Kann man die Winkel der Fundamentaldreiecke in den beiden unteren Bildern erraten?



Die beiden Pflasterungen der Ebene mit Dreiecken wurden mit jeweils einem Satz von senkrecht stehenden Spiegeln erzeugt.